Pattern di Turing e complessità: una introduzione

Luca Bimbi

Nel 1952 Alan Turing pubblica «The Chemical Basis of Morphogenesis», che propone un meccanismo per spiegare come la struttura biologica possa emergere da una condizione iniziale priva di struttura. L'ipotesi avanzata è che un sistema di sostanze chimiche, chiamato da Turing morfogeni, reagenti tra loro e diffondendosi attraverso un tessuto, possa partire da uno stato omogeneo e stabile e sviluppare in modo spontaneo un pattern dotato di una lunghezza d'onda propria caratteristica. La natura del fenomeno è controintuitiva, poiché la diffusione è un processo «livellante», che tende a uniformare le concentrazioni e annullare le differenze. Mettendo insieme i due processi — la reazione tra morfogeni, che può rinforzare localmente le differenze, e la loro diffusione, che come detto invece le livella —, l'equilibrio può diventare instabile e ciò determinerebbe la crescita di un pattern. La letteratura, successivamente, ha chiamato questo fenomeno instabilità indotta dalla diffusione (diffusion-driven instability, o DDI).

Una condizione specifica e precisa è necessaria affinché ciò accada, ossia i due morfogeni devono diffondere a velocità diverse.

Questa condizione è stata formulata da Gierer e Meinhardt come principio di attivazione a corto raggio e inibizione a lungo raggio (local activation, lateral inhibition, ossia LALI). Una sostanza attivatrice si auto-rinforza ma diffonde lentamente, mentre una sostanza inibitrice la frena ma diffonde in fretta. La forma del pattern dipende dai parametri di reazione e diffusione e dalla geometria del dominio. Essa non dipende dai dettagli microscopici, e in questo senso è una proprietà emergente, abbastanza robusta rispetto alle condizioni di partenza.

Esiste un legame, a lungo rimasto non esplorato, tra il lavoro sulla morfogenesi e la definizione di calcolo universale del 1936. Wolfram ha ipotizzato che Turing, mentre scriveva del modello come anello di cellule, avesse in mente qualcosa di simile a quello che oggi chiameremmo automa cellulare. Zenil, usando la teoria dell'informazione algoritmica, ha sviluppato l'idea di Wolfram mostrando proprio quanto il modello del 1952 sia vicino a una definizione di automa cellulare. Nel modello discreto, Turing, come detto, dispone le cellule in anello, le prende tutte

identiche e nello stesso stato iniziale e fa dipendere il nuovo stato di ogni cellula dal proprio e da quello dei due vicini immediati, con bordo circolare, così che la cellula N coincide con la 0. Questo corrisponde, astrattamente, proprio alle caratteristiche di un automa cellulare unidimensionale. Ciò che cambia è la transizione tra stati, che è una coppia di equazioni differenziali di reazione e diffusione e non una regola discreta. Zenil osserva che lo stesso meccanismo dà pattern equivalenti sia trattando le cellule come unità discrete che come punti di un continuo. Conta quindi più il meccanismo di transizione che il substrato.

Se la generazione di pattern è, in questo senso, una forma di computazione, allora la probabilità algoritmica dice qualcosa su quali pattern aspettarsi. Il teorema di codifica di Levin-Chaitin[1] afferma, a grandi linee, che se si alimenta una macchina universale con programmi casuali, gli output a bassa complessità di Kolmogorov, strutturati e comprimibili, escono molto più spesso di quelli casuali. I pattern strutturati non sono quindi rari e, in virtù di quella lettura come automa cellulare, sono quello che ci si aspetta quando l'oggetto nasce da un processo di questo tipo. Un limite, che Zenil non nasconde, è che la probabilità algoritmica spiega la tendenza verso la struttura, ma non un problema che assillava Turing, cioè la rottura di parità, vale a dire perché certe forme asimmetriche compaiano in proporzioni significativamente diseguali. Lo sbilanciamento deve venire da qualche vincolo fisico, chimico o biologico e non informazionale, poiché una stringa e la sua immagine speculare hanno, a meno di una costante additiva, la stessa probabilità algoritmica. Di conseguenza, il modello computazionale afferma che la struttura è probabile, ma non dice quale, tra due strutture speculari, prevarrà.

Ai fini di un uso compositivo, il passaggio dalla forma continua a quella discreta è il punto su cui si regge ogni implementazione, ed è anche dove il modello morfogenetico incontra il «ragionare per griglie», tipico del calcolo numerico.

Nella forma continua, l'evoluzione di un morfogeno u obbedisce a una equazione del tipo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u + f(u, v)$$

Dove f descrive la reazione, D è il coefficiente di diffusione e ∇^2 è l'operatore di Laplace, che misura quanto il valore in un punto si discosti dalla media dei punti

[1] Il coding theorem si deve a L. A. Levin (1974). G. J. Chaitin è fra i fondatori della teoria algoritmica dell'informazione. In sintesi, la probabilità che una macchina universale alimentata con un programma casuale produca una stringa x è circa $2^{-K(x)}$, con K la complessità di Kolmogorov.

circostanti. Il Laplaciano incarna la diffusione, poiché dove una concentrazione è più alta dell'intorno, $\nabla^2 u$ è negativo e la riduce, dove invece è più bassa, la fa risalire.

Discretizzare, inteso come sostituire il continuo con una griglia di celle, implica sostituire l'operatore differenziale con una differenza finita. Nel caso dell'anello di Turing (quindi a una dimensione), il Laplaciano diventa la differenza seconda su primi vicini:

$$\nabla^2 u_r \approx u_{r+1} - 2u_r + u_{r-1}$$

In due dimensioni, su una griglia quindi di natura rettangolare, l'approssimazione più semplice somma i quattro vicini ortogonali e sottrae quattro volte il valore centrale:

$$\nabla^2 u_{i,j} \approx u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}$$

Non è esclusa una espansione su tre dimensioni, anzi Turing stesso getta le basi per ogni dimensione.

Rispetto alla discretizzazione è significativa la scelta del bordo. Un bordo toroidale, dove gli indici si avvolgono, conserva la simmetria dell'anello di Turing ed evita artefatti ai margini. Un bordo a flusso nullo o fisso impone invece condizioni che incidono sul pattern. Inoltre, se Δt è troppo grande rispetto ai coefficienti di diffusione, l'integrazione esplode e ciò costituisce un mero problema numerico. Non va quindi scambiato con l'instabilità morfogenetica. La griglia, poi, fissa la scala minima rappresentabile, poiché se la lunghezza d'onda chimica scende al livello del passo della griglia, il pattern non si risolve più.

Occorre adesso riassumere sistematicamente i criteri che definiscono i pattern di Turing in senso proprio. Innanzitutto, il sistema deve possedere uno stato uniforme che, in assenza di diffusione, è stabile. In secondo luogo, introdotta la diffusione, e solo per effetto di essa, lo stato omogeneo diventa instabile rispetto a perturbazioni di certe lunghezze d'onda (DDI). Se il pattern compare anche senza la differenza nelle velocità di diffusione, non è un pattern di Turing. In terzo luogo, attivatore e inibitore devono diffondere a velocità sufficientemente diverse (LALI), e questa è la condizione più stringente, che ha reso storicamente difficile (ma non impossibile) trovare coppie di morfogeni reali che la soddisfino. Inoltre, il pattern seleziona una scala spaziale propria, non determinata dalle dimensioni del dominio, bensì dai parametri chimici. La spaziatura tra strisce o macchie resta circa costante anche se il dominio cresce. In ultimo, la complessità del pattern cresce con la taglia e la forma del dominio, per effetto delle autofunzioni del Laplaciano, ma il pattern è robusto

rispetto alle condizioni iniziali e ai dettagli delle reazioni, rendendo il fenomeno una proprietà emergente.

Il rapporto tra questi criteri e la biologia reale resta aperto, poiché i morfogeni esistono, ma se nello sviluppo agiscano davvero coppie di Turing è ancora oggetto di discussione. Una prova certa di pattern di Turing viene dalla chimica, dalla reazione CIMA (Chlorite-Iodide-Malonic Acid), dove la condizione LALI è soddisfatta solo per effetto di un artificio. Infatti, l'amido forma un complesso con lo ioduro, l'attivatore, rallentandone la diffusione effettiva e creando così la differenza di velocità significativa che il fenomeno richiede.

Un singolo sistema reazione-diffusione produce un pattern a una sola scala. Più interessante, e assai meno studiata, è la possibilità che più sistemi di Turing convivano nello stesso dominio, ciascuno con la propria lunghezza d'onda, accoppiati tra loro. Potremmo chiamarlo un sistema gerarchico di pattern, o gerarchia dei pattern stessi.

Ciò presuppone che i parametri di un sistema reazione-diffusione non debbano per forza essere costanti. Essi possono dipendere dallo spazio e, in particolare, essere modulati dal pattern di un altro sistema che lavora su altra scala. Lo stesso Turing, nel passo più citato in letteratura del suo articolo, va in questa direzione quando osserva che gran parte di un organismo, per gran parte del tempo, passa da un pattern a un altro più che dall'omogeneità a un pattern. Maini et al. mostrano come questa idea sciolga certe contraddizioni sperimentali, poiché un pattern a grana fine può formarsi su un sostrato già modulato da un pattern a grana maggiore, e i due insieme spiegano forme che nessuno dei due, da solo, produrrebbe.

Si individuano qui, in via introduttiva, almeno tre configurazioni in vista di una corrispondenza musicale, da intendere come ipotesi di lavoro.

Un sistema lento e di grande lunghezza d'onda genera pattern che fa da campo di parametri per un sistema veloce e piccola lunghezza d'onda. Ne emerge una struttura a due scale, che potrebbe, in musica, rappresentare una forma annidata.

In alternativa, due sistemi di scala simile occupano lo stesso dominio e si contendono le stesse risorse. Il risultato non è la somma di due pattern ma una terza forma, spesso a tendenza «irregolare».

Ancora, un pattern potrebbe arrivare all'equilibrio e a quel punto, cambiando un parametro di soglia, potrebbe far nascere un secondo sistema che si sviluppa sul primo ormai fermo, come successione nel tempo di regimi morfogenetici.

Un aspetto particolarmente interessante, e questione ancora aperta sia nei modelli sia in biologia, è la stabilità di queste forme, poiché l'accoppiamento non la garantisce, e proprio questa fragilità apre, sul versante musicale, occasioni e possibilità tutte da esplorare.

Stabilito il modello di base, si aprono almeno due direzioni, ciascuna oggetto di un contributo a sé. Perché una data struttura morfogenetica potrebbe tradursi in una data forma musicale è il contenuto di tali contributi.

La prima direzione riguarda la sonificazione, e prima ancora delle tecniche impone una domanda sulla natura di ciò che si sonifica. Il pattern è una partitura, una notazione da leggere e tradurre in suono secondo una corrispondenza fissata? È una base dinamica di dati da cui estrarre grandezze (valori di concentrazione cella per cella, densità medie per righe e colonne, gradienti) da mappare sul suono attraverso funzioni lineari o non lineari, fino a quantizzare il campo secondo criteri fissati dal compositore? Oppure è la descrizione di un movimento, una traiettoria che colloca eventi sonori in uno spazio a una, due o tre dimensioni? Qual è in tal caso, la natura dello spazio? Uno spazio di parametri o delle transizioni tra essi? Sono tre letture non esclusive, e la gerarchia di pattern su scale diverse consente di farle convivere, governando con processi distinti più sonificazioni in parallelo.

La seconda direzione riguarda il rapporto tra il modello morfogenetico e la teoria del gesto e dell'ipergesto di Mazzola e Andreatta, soprattutto sul versante simbolico. Anche in questo caso la questione precede le tecniche ed è relativa alla sua collocazione. Dove si pone il pattern in quell'architettura? È il corpo, lo spazio entro cui qualcosa si muove, oppure sono gli archi relazionali del diagramma? L'ipotesi che il contributo svilupperà è che, sul piano simbolico, il pattern non è il corpo bensì la legge che lega ogni cella ai suoi vicini, come formula definita sugli archi della griglia, mentre il campo che evolve nel tempo è il gesto — anzi, l'ipergesto — che quella formula «scongela» nello spazio-tempo.

Il limite, infine, è dettato solo dalla mancanza di curiosità e di spirito di esplorazione.

Riferimenti

Castets, V., Dulos, E., Boissonade, J. e De Kepper, P. (1990). Experimental evidence of a sustained standing Turing-type nonequilibrium chemical pattern. *Physical Review Letters*, 64(24), 2953–2956.

Gierer, A. e Meinhardt, H. (1972). A theory of biological pattern formation. *Kybernetik*, 12(1), 30–39.

Lengyel, I. e Epstein, I. R. (1991). Modeling of Turing structures in the chlorite-iodide-malonic acid-starch reaction system. *Science*, 251(4994), 650–652.

Levin, L. A. (1974). Laws of information conservation (nongrowth) and aspects of the foundation of probability theory. *Problems of Information Transmission*, 10(3), 206–210.

Maini, P. K., Woolley, T. E., Gaffney, E. A. e Baker, R. E. (2016). Turing's Theory of Developmental Pattern Formation. In S. B. Cooper e A. Hodges (a cura di), *The Once and Future Turing*. Cambridge University Press, pp. 131–143.

Mazzola, G. e Andreatta, M. (2007). Diagrams, gestures and formulae in music. *Journal of Mathematics and Music*, 1(1), 23–46.

Turing, A. M. (1936). On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-42, 230–265.

Turing, A. M. (1952). The Chemical Basis of Morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B*, 237(641), 37–72.

Wolfram, S. (2002). *A New Kind of Science*. Wolfram Media.

Zenil, H. (2013). Turing patterns with Turing machines: emergence and low-level structure formation. *Natural Computing*, 12(2), 291–303.